

{18}

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να γραφεί το 1000 σε δεκαδική, τριαντική και πενταδική αναπαράσταση

2) ΝΔΟ

i) $\prod_{i=2}^n \left(1 - \frac{1}{i}\right) = \frac{1}{n}$, ii) $\sqrt{n} \leq \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

iii) $3 \mid 2^{2^n} - 1$

3) Δίνεται η ακολουθία Fibonacci

$F_1 = F_2 = 1$ και $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $n \geq 2$

ΝΔΟ $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$

4) Έστω $\frac{p}{q}$ αναγυρο $(p, q) = 1 \nmid MK$

Να βρείτε το αναγυρο ελάχιστο ενός ρητού $r \in \mathbb{Q}$
με τη βοήθεια της ναυτικής διατάξης

ΛΥΣΗ

2) i) Έστω ότι ισχύει για $n=k$ η πρόταση $P(k)$
και έσο ισχύει και για $n=k+1$. Έσο παραβλέψα

Παρατηρείται ότι για $n=2$ $\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ισχύει

$$\prod_{i=2}^k \left(1 - \frac{1}{i}\right) = \prod_{i=2}^k \left(1 - \frac{1}{i}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k} \cdot \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k+1}$$

ii) $\forall n \geq 1$, για $n=1 \Rightarrow \sqrt{1} \leq \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$ ισχύει

Έσσο ότι η πρόταση ισχύει (ή αληθεύει) για
 $n=k$ και έσο αληθεύει και για $k+1$

$$\sqrt{k} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k+1}} + \sqrt{k} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Άρκει, να έσο $\frac{1}{\sqrt{k+1}} + \sqrt{k} > \sqrt{k+1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k+1}} + \sqrt{k} - \sqrt{k+1} > 0 \Rightarrow \frac{1 + \sqrt{k} \sqrt{k+1} - (k+1)}{\sqrt{k+1}} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1 + \sqrt{k^2+k} - k - 1}{\sqrt{k+1}} > 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{k^2+k} - k}{\sqrt{k+1}} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sqrt{k^2+k} - k)(\sqrt{k+1}) > 0 \Rightarrow \sqrt{k^2+k} - k > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{k^2+k} > k \xrightarrow{k \geq 1} k^2+k > k^2 \Rightarrow k > 0 \text{ ΙΟΧΥΗ.}$$

iii) Για $n=0 \rightsquigarrow 3 \mid 2^0 - 1 = 0$ ΙΟΧΥΗ.

(Εάν συ η πρόταση $P(n)$ αληθεύει και ΟΔΟ και η πρόταση $P(n+1)$ αληθεύει ομοίως.)

β' γρονος (πιο δύσκολος)

$$3 \mid 2^{2^m} - 1 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) : 2^{2^m} - 1 = 3k$$

$$\text{Αλλά, } (2^{2^m} - 1) = (2^2)^m - 1^m = \underbrace{(2^2 - 1)}_{\text{Διαίρ. 3}} \cdot ((2^2)^{m-1} + (2^2)^{m-2} + \dots + 1)$$

$$\text{Άρα } 3 \mid 2^{2^m} - 1 \text{ ΙΟΧΥΗ.}$$

3) Για $n=2$, $F_2 < \left(\frac{7}{4}\right)^2$ ΙΟΧΥΗ και για $n=3$, $F_3 = 2 < \left(\frac{7}{4}\right)^3$ ΙΟΧΥΗ

Εάν συ ΙΟΧΥΗ για $n=k$ και ΟΔΟ ΙΟΧΥΗ για $n=k+1$

Υποθέτουμε πως ΙΟΧΥΗ για όλους τους φυσικούς μέχρι και

το k . $F_i < \left(\frac{7}{4}\right)^i$ ΟΔΟ ΙΟΧΥΗ για $k+1$.

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{7}{4} + 1\right) =$$

$$= \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{7}{4} + 1\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \cdot \frac{11}{4} = \underbrace{\left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \cdot \frac{44}{16}}_{\text{ΟΔΟ}} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}$$

$$\left(\frac{7}{4}\right)^{k+1} = \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}$$

$$\text{Οπότε } \frac{44}{16} < \frac{49}{16} \text{ ΙΟΧΥΗ.}$$

(26)

4) Ο αριθμοί $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{-5}{-10}$ είναι ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΙ

Συνήθως, επιλέγουμε το $\frac{1}{2}$ γιατί το 1 και 2 δεν έχουν κοινό διαιρέτη. Άρα, αυτοί υπάρχουν πρώτοι μεταξύ τους ή πρώτοι προς αλλήλους.

Εστω το $S = \{m \in \mathbb{N}^* \mid m \cdot r \in \mathbb{Z}\} \neq \emptyset$

$$(\text{πχ } r = \frac{2470897520}{23182} \text{ όπου } 23182 \cdot r \in \mathbb{Z})$$

Άρα, οποιονδήποτε $A \in S$ έχει ελάχιστο το m_0

Άρα, $m_0 r \in \mathbb{Z}$. Άρα, $m_0 r = m \in \mathbb{Z}$

$r = \frac{m}{m_0}$ και m και m_0 είναι πρώτοι μεταξύ τους

Υποθέτουμε ότι δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους

απλ. έχουν κοινό διαιρέτη

$$\left. \begin{array}{l} m = d m' \\ m_0 = d m_0' \end{array} \right\} \quad r = \frac{d m'}{d m_0'} = \frac{m'}{m_0'}$$

Το $m_0' r = m' < m$

Άρα, το $m_0' < m_0$ είναι στοιχείο του S .

ΑΔΥΝΑΤΟΝ, γιατί το m_0 ελάχιστο

Άρα, m και m_0 δεν έχουν κοινό διαιρέτη

1) Άλλως επιλέξαμε για κάθε ένα σύστημα από τα συνηθισμένα αντιστοίχα, διαδοχικές διαιρέσεις με το 10 για τη δεκαδική μορφή, με το τρία για την τριαδική και με το 5 για την πενταδική μορφή

$$\text{πχ } 1000 = 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 = (1000)_{10}$$

για την τριαδική:

$$\begin{array}{r|l} \text{για 3:} & 1000 \\ 333 & 0 \\ 111 & 0 \\ 37 & 1 \\ 12 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$\text{Άρα, } 1000 = (101001)_3 = 1 \cdot 3^6 + 1 \cdot 3^5 + 0 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0$$

οποιοι και σαν πενταδική μορφή

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ ΦΥΣΙΚΩΝ

Έστω $k \in \mathbb{N}^*$. Αν $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$, τότε $\sqrt{k} \notin \mathbb{Q}$

$\sqrt{k} \notin \mathbb{N} \Leftrightarrow 0 < k$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο άλλου φυσικού

$\sqrt{k} \notin \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{k}$ είναι άρρητος

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Υποθέτουμε ότι $\sqrt{k} \in \mathbb{Q}$. Άρα, $\sqrt{k} = \frac{a}{b}$ με $a \in \mathbb{Z}^*$, $b \in \mathbb{N}^*$

Ορίζουμε το $S = \{n \in \mathbb{N}^* : n\sqrt{k} \in \mathbb{Z}\}$

Το $b \in S$. Άρα, $S \neq \emptyset$ και με τον ΑΚΔ έχει ελάχιστο σήμειο

A_S είναι το ελάχιστο το m , $m\sqrt{k} \in \mathbb{Z}$

Το $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$ (γιατί το k όχι τέλειο τετράγωνο)

Άρα, $\lfloor \sqrt{k} \rfloor < \sqrt{k} < \lfloor \sqrt{k} \rfloor + 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{k} - \lfloor \sqrt{k} \rfloor > 0 \Rightarrow \overset{(+)}{m} \cdot \overset{(+)}{(\sqrt{k} - \lfloor \sqrt{k} \rfloor)} \in \mathbb{Z}$$

• $m\sqrt{k} \in \mathbb{Z}^*$ και $m\lfloor \sqrt{k} \rfloor \in \mathbb{Z}^*$ { Γιατί $m(\sqrt{k} - \lfloor \sqrt{k} \rfloor) < m$

Έστω $m' = m(\sqrt{k} - \lfloor \sqrt{k} \rfloor) > 0$ και $m' \in \mathbb{N}^*$ { Γιατί $\sqrt{k} - \lfloor \sqrt{k} \rfloor < 1$

$$m'\sqrt{k} = m(\sqrt{k} - \lfloor \sqrt{k} \rfloor)\sqrt{k} = \underbrace{mk}_{\in \mathbb{Z}} - \underbrace{m\sqrt{k} \cdot \lfloor \sqrt{k} \rfloor}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$$

και $m'\sqrt{k} > 0$. Άρα $m' \in S$ και $m' < m$. Αδύνατο διότι ελάχιστο

ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ - ΔΙΟΝΥΜΙΚΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Έστω το σύνολο $A = \{\square, +\}$. Πόσες δυάδες μπορούμε να δημιουργήσουμε, κάθε στοιχείο χρησιμοποιείται μόνο μια το πολύ φορά; Εκεί συκασία η σειρά ή όχι;;

Αν: • Όχι: $\{\square, +\} = \{+, \square\}$

Όταν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά. Ίσως υποσύνολο του αρχικού συνόλου.

• ΝΑΙ: $\{\square, +\} \neq \{+, \square\}$

Έστω το σύνολο $A = \{\square, +, 0\}$. Πόσες δυάδες μπορούμε να φτιάξουμε; Βρίσκεται ήδη στην 1^η θέση, οπότε δεν μετράμε

$\left\{ \overrightarrow{\square}, \overleftarrow{\square} \right\}$ 1 από τα 3 2 επιλογές $\{\square, +\}, \{\square, 0\}, \{+, \square\}, \{+, 0\}, \{0, \square\}, \{0, +\}$
3 επιλογές

Αν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά που ερχομαι;
Ζητάμε τα υποσύνολα του A :
 $\{\emptyset, +\}, \{\emptyset, 0\}, \{+, 0\}$ 2 Τετάρτη.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια k -μετάθεση, ενός συνόλου n -στοιχείων
είναι μια διατεταγμένη (έχει σημασία η σειρά).
Επιλογή k στοιχείων από τα n .
Ο αριθμός των k -μεταθεσών από ένα σύνολο n
στοιχείων που συμβολίζεται με $M(n, k)$

ΠΡΟΤΑΣΗ: $M(n, k) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θέλουμε να βρούμε όλες τις k -άδες

$$\left(\underset{1^{\text{η}} \text{ θέση}}{n}, \underset{2^{\text{η}} \text{ θέση}}{n-1}, \underset{3^{\text{η}} \text{ θέση}}{n-2}, \dots, \underset{(k-1) \text{ θέση}}{n-(k-1)} \right)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

$$M(n, k) = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω σύνολο k στοιχείων

Ο αριθμός των k -άδων είναι $M(k, k) = k!$